

# PENENTUAN TENSOR GRADIEN GRAVITASI MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI FOURIER

Oleh :  
**Budhi Nhirwana\***  
**Hendra Grandis\***

## Sari

Data gradien gravitasi yang diperoleh melalui teknik pengukuran gradiometer dapat memberikan informasi bawah-permukaan yang lebih detil dibandingkan dengan data gravitasi komponen vertikal saja. Namun demikian pengukuran gradiometer relatif lebih sulit dan memerlukan peralatan khusus sehingga tidak dilakukan secara rutin. Makalah ini membahas penentuan komponen tensor gradien gravitasi dari data gravitasi komponen vertikal ( $g_z$ ) melalui transformasi Fourier. Metode tersebut didasarkan pada hubungan antara komponen horizontal ( $g_x$  dan  $g_y$ ) serta gradien setiap komponen dengan komponen vertikal gravitasi ( $g_z$ ) dalam domain frekuensi spasial. Tensor gradien gravitasi dari model prisma menggunakan FFT dibandingkan dengan hasil forward modelling dan diperoleh RMS *error* maksimum 1% (data tanpa *noise*) dan 11% (data dengan *noise* 5%). Metode ini diterapkan pula pada data gravitasi dari model sintetik yang lebih kompleks dengan hasil memuaskan yang dapat membantu interpretasi.

*Kata kunci* : gravitasi, gradien

## Abstract

The gravity gradient obtained from gradiometer measurements give more detailed subsurface information than vertical component of gravity data. However, gradiometer measurements are more difficult and need special instruments such that they are not performed routinely. The paper describes the determination of gravity gradient tensor components from vertical component of gravity data ( $g_z$ ) using Fourier transformation. This technique is based on the relationship between horizontal components of gravity ( $g_x$  and  $g_y$ ) and gradient of each components to the vertical component of gravity ( $g_z$ ) in the spatial frequency domain. The gravity gradient tensor of a prism model using FFT is compared to results from forward modelling and the maximum RMS error are 1% (data without noise) and 11% (data with 5% noise). The method is also applied to gravity data from a more complicated synthetic model with satisfactory results, which help the interpretation.

*Keywords* : gravity, gradient

\* Departemen Geofisika dan Meteorologi, Fakultas Ilmu Kebumihan dan Teknologi Mineral, ITB.

## I. PENDAHULUAN

Data gravitasi yang biasanya diukur adalah komponen vertikal ( $g_z$ ) meskipun percepatan gravitasi merupakan vektor yang mempunyai komponen dalam arah  $x$ ,  $y$  dan  $z$  atau  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ . Konsep gradien gravitasi baik vertikal maupun horizontal untuk memperoleh informasi bawah-permukaan yang lebih detil telah lama diperkenalkan, terutama untuk mendelineasi sumber anomali. Namun demikian implementasinya di lapangan mengalami kendala teknis mengingat pengukuran gradiometer lebih kompleks dan memerlukan waktu yang lebih lama daripada pengukuran gravitasi biasa.

Pengukuran menggunakan gravimeter pada level ketinggian yang berbeda diperlukan untuk memperoleh gradien vertikal dari komponen vertikal gravitasi ( $g_{zz}$ ) di satu titik. Gradien horizontal dari komponen vertikal gravitasi ( $g_{zx}$  dan  $g_{zy}$ ) dapat diperoleh dari perbedaan hasil pengukuran gravitasi dalam arah horizontal (Hansen dkk., 1999).

Untuk memanfaatkan informasi yang terkandung dalam gradien gravitasi dan magnetik, beberapa peneliti menggunakan besaran gradien pada metode-metode yang telah dikembangkan. Marson & Klingele (1993) mendiskusikan interpretasi gravitasi 3-D berdasarkan parameter

gradien vertikal gravitasi. Zang dkk. (2000) menggunakan gradien gravitasi dalam bentuk tensor pada teknik dekonvolusi Euler. Gradien anomali magnetik juga digunakan dalam kuantifikasi hasil interpretasi menggunakan sinyal analitik (Hsu dkk, 1996).

Dalam perkembangannya saat ini telah tersedia perangkat pengukuran tensor gradien gravitasi namun masih dalam tahap ujicoba. Tensor gradien gravitasi adalah gradien semua komponen gravitasi terhadap semua arah sumbu koordinat ( $x, y, z$ ). Pengukuran tensor gradien gravitasi belum akan operasional secara rutin dalam waktu dekat. Hal ini mengingat kompleks dan mahalnya instrumen yang hanya tersedia dalam versi *airborne* atau *shipborne* (Vasco & Taylor, 1991; Huston dkk., 1999).

Tensor gradien gravitasi pada prinsipnya dapat dihitung berdasarkan data gravitasi komponen vertikal. Hal ini mengingat adanya hubungan antara komponen-komponen horisontal gravitasi ( $g_x$  dan  $g_y$ ) dengan komponen vertikal gravitasi ( $g_z$ ) dalam domain frekuensi spasial. Disamping itu perhitungan gradien suatu komponen relatif lebih mudah dilakukan dalam domain Fourier menggunakan teknik FFT. Makalah ini membahas implementasi metode penentuan tensor gradien gravitasi yang telah dikemukakan oleh Mickus & Hinojosa (2001).

Metode penentuan tensor gradien gravitasi menggunakan FFT diuji dengan data sintetik dari model prisma baik tanpa *noise* maupun dengan *noise* 5%. Perbandingan dengan tensor gradien gravitasi hasil forward modelling menunjukkan bahwa RMS *error* maksimum adalah 1% (tanpa *noise*) dan 11% (dengan *noise*) yang dapat dianggap masih cukup memadai. Penerapan metode pada data gravitasi dari model sintetik yang lebih kompleks menghasilkan informasi yang dapat membantu dalam interpretasi.

## II. METODOLOGI

Tensor gradien gravitasi secara lengkap memiliki 9 komponen yang dituliskan sebagai berikut :

$$\underline{\Gamma} = [\Gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Percepatan gravitasi adalah gradien potensial gravitasi ( $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ ) yang memenuhi persamaan Laplace  $\nabla^2\phi = 0$  sehingga dari  $\nabla \times \mathbf{g} = 0$  diperoleh pasangan transformasi Fourier berikut :

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z} \Leftrightarrow ik_y G_z = |\mathbf{k}| G_y \quad (2a)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x} \Leftrightarrow |\mathbf{k}| G_x = ik_x G_z \quad (2b)$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y} \Leftrightarrow ik_x G_y = ik_y G_x \quad (2c)$$

dimana  $G_x(k_x, k_y)$ ,  $G_y(k_x, k_y)$  dan  $G_z(k_x, k_y)$  adalah komponen gravitasi dalam domain frekuensi spasial yaitu hasil transformasi Fourier 2-D dari  $g_x, g_y$  dan  $g_z$ , ( $k_x, k_y$ ) adalah bilangan gelombang yang memenuhi hubungan (Blakely, 1995) :

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)} = ik_z \quad (3)$$

Persamaan (2) memanfaatkan sifat diferensiasi dalam domain Fourier dan menunjukkan bahwa tensor gradien gravitasi bersifat simetrik karena  $g_{yx} = g_{xy}$ ,  $g_{zx} = g_{xz}$  dan  $g_{zy} = g_{yz}$ . Dengan demikian dalam tensor gradien gravitasi hanya terdapat 6 komponen tensor yang independen, yaitu  $g_{xx}$ ,  $g_{xy}$ ,  $g_{xz}$ ,  $g_{yy}$ ,  $g_{yz}$ , dan  $g_{zz}$ .

Dari persamaan (2) diperoleh hubungan antara komponen horisontal gravitasi  $g_x$  dan  $g_y$  dengan komponen vertikal gravitasi  $g_z$  dalam domain Fourier sebagai berikut :

$$g_x \Leftrightarrow G_x = \frac{ik_x}{|\mathbf{k}|} G_z \quad (4a)$$

$$g_y \Leftrightarrow G_y = \frac{ik_y}{|\mathbf{k}|} G_z \quad (4b)$$

Dengan demikian keenam komponen tensor gradien gravitasi yang independen dapat diperoleh dari komponen vertikal gravitasi melalui persamaan-persamaan berikut :

$$g_{xx} = \frac{\partial g_x}{\partial x} \Leftrightarrow G_{xx} = ik_x G_x = \frac{-k_x^2}{|\mathbf{k}|} G_z \quad (5a)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial g_x}{\partial y} \Leftrightarrow G_{xy} = ik_y G_x = \frac{-k_x k_y}{|\mathbf{k}|} G_z \quad (5b)$$

$$g_{xz} = \frac{\partial g_x}{\partial z} \Leftrightarrow G_{xz} = |\mathbf{k}| G_x = ik_x G_z \quad (5c)$$

$$g_{yy} = \frac{\partial g_y}{\partial y} \Leftrightarrow G_{yy} = ik_y G_y = \frac{-k_y^2}{|\mathbf{k}|} G_z \quad (5d)$$

$$g_{yz} = \frac{\partial g_y}{\partial z} \Leftrightarrow G_{yz} = |\mathbf{k}| G_y = ik_y G_z \quad (5e)$$

$$g_{zz} = \frac{\partial g_z}{\partial z} \Leftrightarrow G_{zz} = |\mathbf{k}| G_z \quad (5f)$$

Dalam notasi matriks tensor gradien gravitasi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\underline{\Gamma} = [\Gamma_{ij}] = \mathfrak{T}^{-1} \left\{ [K(\mathbf{k})] G_z(\mathbf{k}) \right\} \quad (6)$$

dimana :

$$[K(\mathbf{k})] = \begin{bmatrix} \frac{-k_x^2}{|\mathbf{k}|} & \frac{-k_x k_y}{|\mathbf{k}|} & i k_x \\ \frac{-k_x k_y}{|\mathbf{k}|} & \frac{-k_y^2}{|\mathbf{k}|} & i k_y \\ i k_x & i k_y & |\mathbf{k}| \end{bmatrix} \quad (7)$$

untuk  $|\mathbf{k}| \neq 0$  dan  $\mathfrak{T}^{-1}$  adalah transformasi Fourier invers.

### III. HASIL DAN PEMBAHASAN

*Forward modelling* gravitasi 3-D (Blakely, 1995) digunakan untuk menghitung data sintetik, yaitu komponen vertikal gravitasi yang merupakan respons model prisma sederhana. Dimensi ( $x, y, z$ ) model prisma yang digunakan adalah  $5 \times 5 \times 1 \text{ km}^3$  pada kedalaman 1 km dengan kontras densitas  $0.5 \text{ gram/cm}^3$ . Posisi prisma terletak di tengah-tengah daerah pengukuran seluas  $15 \times 15 \text{ km}^2$  dengan interval perhitungan  $0.5 \times 0.5 \text{ km}$ . *Noise* yang terdistribusi normal dengan rata-rata nol dan standar deviasi 5% ditambahkan pada data sintetik untuk mensimulasi data lapangan.

Tensor gradien gravitasi melalui metode FFT berdasarkan persamaan (5) atau (6) dihitung menggunakan program komputer yang dimodifikasi dari Blakely (1995). Hasilnya dibandingkan dengan tensor gradien gravitasi yang dihitung secara langsung menggunakan teknik *forward modelling* (Vasco & Taylor, 1991; Zhang dkk., 2000). Pada kasus data sintetik tanpa *noise* (Gambar 1) secara visual tidak tampak perbedaan yang berarti dengan hasil *forward modelling*. Komponen tensor dari data sintetik dengan *noise* 5% (Gambar 2) masih menunjukkan kemiripan pola dengan hasil *forward modelling* meskipun terlihat adanya pengaruh *noise* yang cukup besar akibat penggunaan proses FFT.

Secara lebih kuantitatif RMS (*root mean square error*) maksimum adalah pada komponen  $g_{zz}$ , yaitu sekitar 0.06 Eötvös untuk data tanpa *noise* dan sekitar 0.69 Eötvös untuk data dengan *noise*

(1 Eötvös = 0.1 mGal/km) (Tabel 1). Relatif terhadap harga yang sebenarnya, RMS *error* tersebut adalah sekitar 1% untuk data tanpa *noise* dan 11% untuk data dengan *noise* 5%. Mengingat faktor pembesaran *noise* atau *error* maka *noise* sekitar 5% merupakan batas maksimum agar perhitungan tensor gradien gravitasi menggunakan teknik FFT dapat memberikan hasil yang masih dapat diterima.

Informasi yang diperoleh dari tensor gradien gravitasi yang dapat membantu interpretasi diantaranya adalah dalam hal geometri sumber anomali secara lateral. Komponen  $g_{xx}$  mempertegas batas-batas benda anomali yang tegak-lurus sumbu  $x$ , demikian sebaliknya untuk  $g_{yy}$ . Posisi sudut-sudut benda anomali diperlihatkan oleh harga ekstrem (minimum atau maksimum) pada komponen  $g_{xy}$ . Kontur harga nol atau transisi antara harga maksimum dan minimum pada komponen  $g_{xz}$  dan  $g_{yz}$  menunjukkan adanya simetri yang melalui pusat massa benda anomali, yaitu yang dilalui oleh

Komponen  $g_{zz}$  mendelineasi benda anomali pada semua sisi yang sejajar dengan sumbu koordinat dan secara umum lebih baik dari pada komponen vertikal gravitasi  $g_z$ . Dalam interpretasi dikenal *second vertical derivative* (SVD) yaitu turunan vertikal kedua dari data gravitasi yang dapat mempertegas batas anomali atau memisahkan sumber anomali yang saling *overlap*. Pada dasarnya komponen  $g_{zz}$  adalah turunan vertikal pertama (*first vertical derivative*) dengan sifat yang mirip dengan SVD.

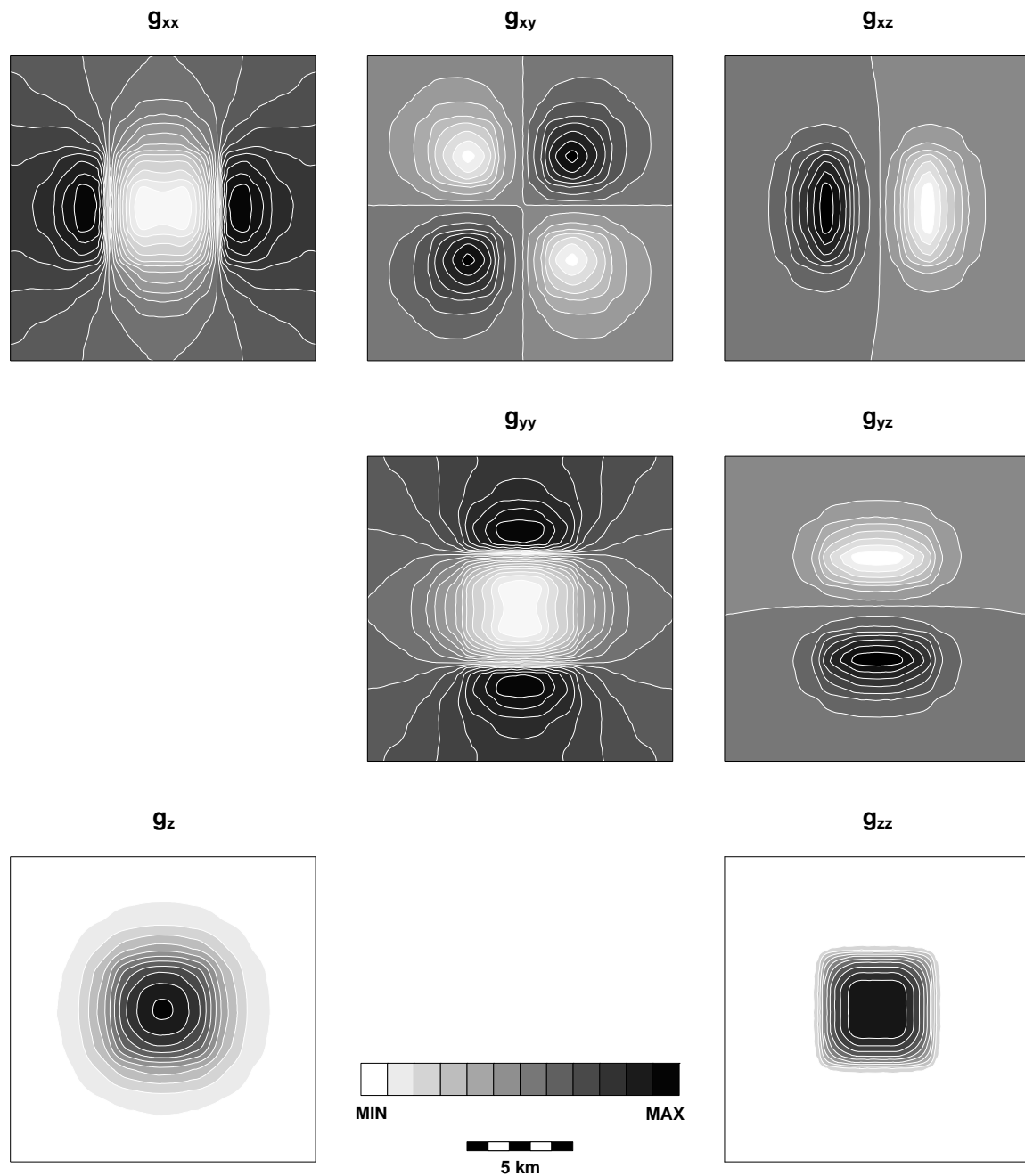
Tabel 1. RMS *Error* (dalam Eötvös).

$g_{ij}$	tanpa <i>noise</i>	<i>Noise</i> 5%
$g_{xx}$	0.01922	0.21753
$g_{xy}$	0.00347	0.09422
$g_{xz}$	0.00021	0.27080
$g_{yy}$	0.01922	0.24646
$g_{yz}$	0.00021	0.30573
$g_{zz}$	0.05590	0.69121

Pengujian dilakukan pula terhadap data gravitasi dari model sintetik yang lebih kompleks dengan dua prisma yang saling tegak lurus pada daerah seluas  $15 \times 15 \text{ km}^2$  dengan interval perhitungan  $0.5 \times 0.5 \text{ km}$ . Dimensi masing-masing prisma adalah  $1 \times 7 \times 1 \text{ km}^3$  pada kedalaman 1 km dan  $8 \times 1 \times 3 \text{ km}^3$  pada kedalaman 2 km. Pada model tersebut ditambahkan anomali lokal berupa kubus  $1 \text{ km}^3$  dekat permukaan untuk menguji kemampuan pemisahan anomali yang saling

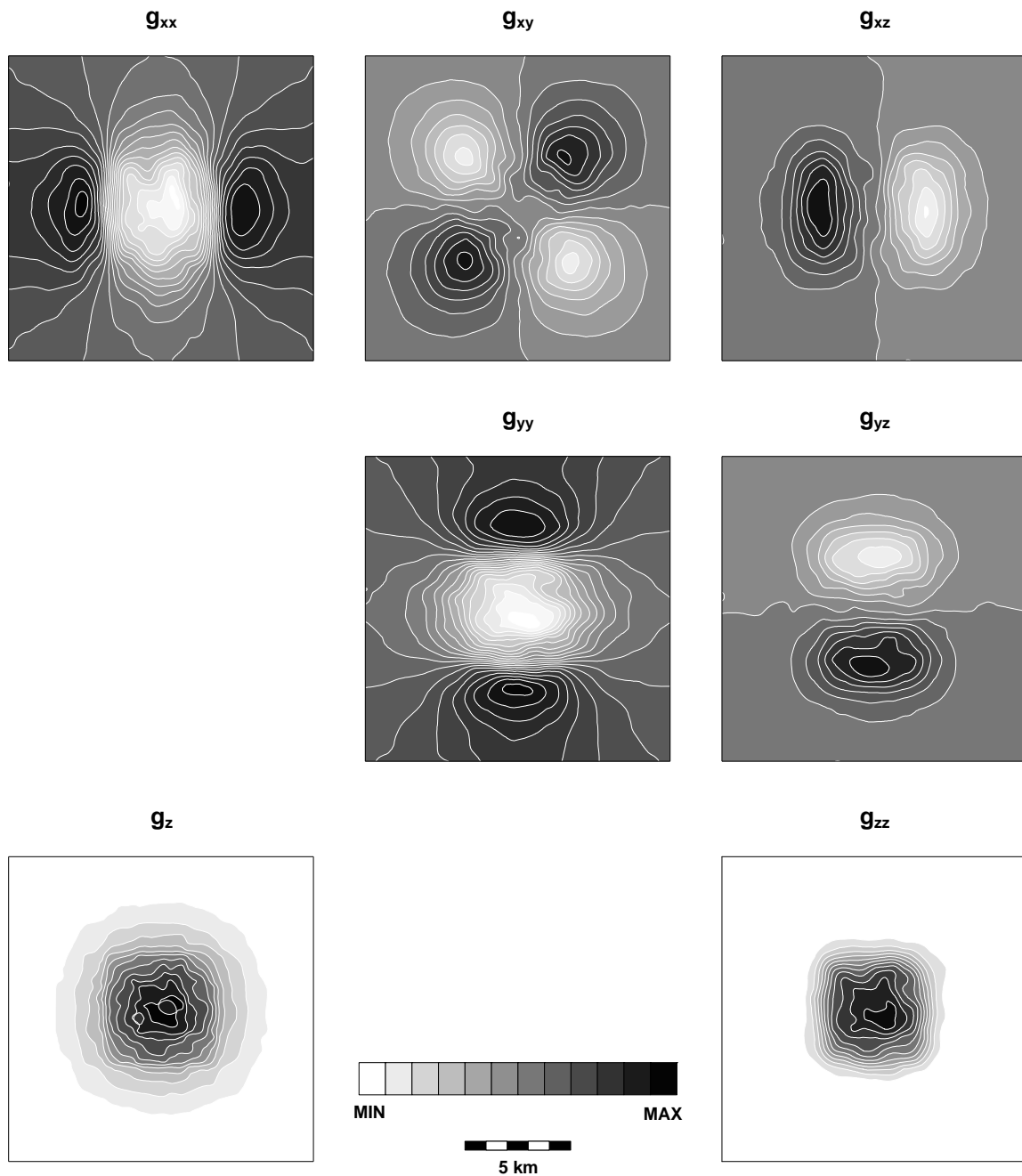
overlap. Kontras densitas semua prisma adalah 0.5 gram/cm<sup>3</sup>. Data dan hasil perhitungan tensor

gradien gravitasi ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 1.

Komponen tensor gradien gravitasi ( $\Gamma_{ij}$ ) hasil perhitungan menggunakan FFT dari data sintetik ( $g_z$ ) tanpa noise. Kontur pada setiap panel secara kualitatif menyatakan harga minimum (putih) dan maksimum (hitam) gradien gravitasi.



Gambar 2.

Komponen tensor gradien gravitasi ( $\Gamma_{ij}$ ) hasil perhitungan menggunakan FFT dari data sintetik ( $g_z$ ) yang telah ditambah noise terdistribusi normal 5%. Kontur pada setiap panel secara kualitatif menyatakan harga minimum (putih) dan maksimum (hitam) gradien gravitasi.

Terlihat bahwa data  $g_z$  sudah menunjukkan adanya anomali magnetik yang cukup jelas, yaitu anomali dengan arah baratdaya-timurlaut. Mengingat anomali utama tidak simetris dengan sumbu koordinat namun hampir sejajar dengan sumbu  $y$  maka deliniasi anomali lebih menonjol pada komponen  $g_{xy}$ ,  $g_{yy}$  dan  $g_{zz}$ . Hal ini mengindikasikan adanya keterbatasan interpretasi menggunakan tensor gradien.

#### IV. KESIMPULAN

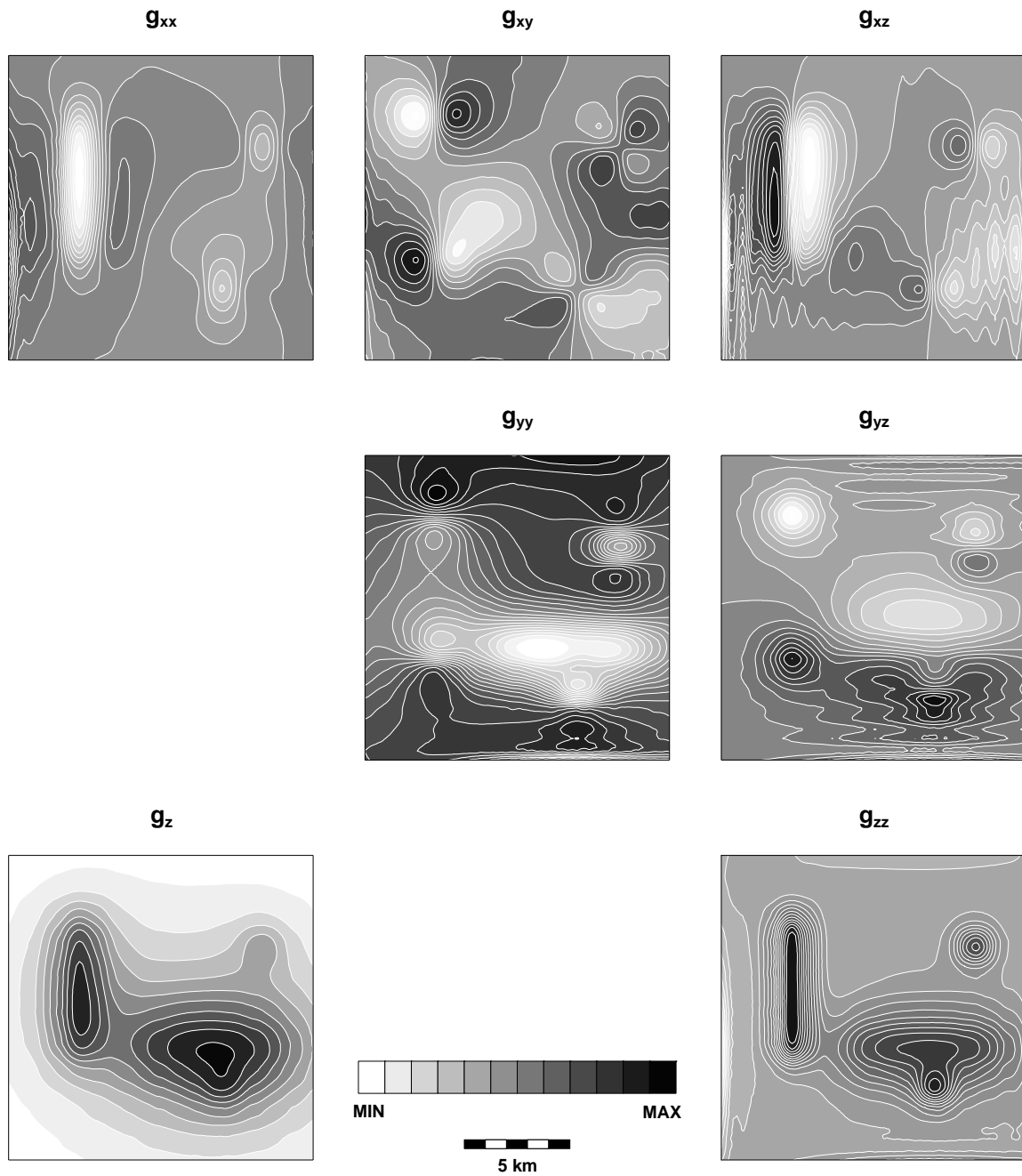
Komponen tensor gradien gravitasi dapat dihitung dari data gravitasi komponen vertikal ( $g_z$ ) menggunakan transformasi Fourier. Perbandingan antara tensor gradien gravitasi hasil metode FFT dengan hasil *forward modelling* untuk model prisma sederhana (tanpa *noise* dan dengan *noise* 5%) menghasilkan RMS *error* yang cukup baik (maksimum 1% dan 11%). Hal ini menunjukkan validitas penentuan tensor gradien gravitasi menggunakan transformasi Fourier. Meskipun demikian, pengaruh *noise* terhadap hasil perhitungan mengharuskan kehati-hatian dalam penggunaan teknik FFT yang memang sensitif terhadap adanya *noise*.

Penerapan pada data lapangan berupa data magnetik yang telah direduksi ke kutub menunjukkan bahwa tensor gradien tidak dapat mendelineasi dengan baik anomali yang tidak simetris terhadap sumbu koordinat. Batas-batas anomali hanya dapat diperoleh dari komponen yang merupakan gabungan arah  $x$  dan  $y$ . Keterbatasan ini lebih pada kandungan informasi pada tensor gradien yang sangat bergantung pada sistem koordinat yang dipilih, bukan pada metode penentuan tensor gradien gravitasi menggunakan teknik FFT.

Untuk mengatasi keterbatasan tersebut dapat digunakan prosedur rotasi tensor sebagaimana dikenal pada metode magnetotellurik yang juga sudah diperkenalkan oleh Pedersen & Rasmussen (1990) untuk data medan potensial (gravitasi dan magnetik). Dalam hal ini sistem koordinat dirotasi sehingga searah dengan arah struktur dan diperoleh komponen-komponen tensor gradien gravitasi dengan karakteristik sebagaimana telah dibahas di atas.

#### DAFTAR PUSTAKA

1. Bell, R.E., Anderson, R.N., Pratson, L.F., 1997, Gravity Gradiometry Resurfaces, *The Leading Edge*, January, 55-59.
2. Blakely, R.J., 1995, Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications, Cambridge University Press.
3. Hansen R.O., Pearson, W.C., deRidder, Johnson, W.M., 1999, The Gravity Gradiometer: Basic Concepts and Tradeoffs, *The Leading Edge*, April, 478-480.
4. Hsu, S.K., Sibuet, J.C., Shyu, C.T., 1996, High-resolution Detection of Geologic Boundaries from Potential-Field Anomalies, An Enhanced Analytic Signal Technique, *Geophysics*, **61**, 373-386.
5. Huston H.H., Sestak, H., Lyman, G.D., 1999, Methodology for Interpreting 3-D Marine Gravity Gradiometry Data, *The Leading Edge*, April, 482-485.
6. Marson, I., Klingele, E.E., 1993, Advantages of Using the Vertical Gradient of Gravity for 3-D Interpretation, *Geophysics*, **58**, 1588-1595.
7. Mickus, K.L., Hinojosa, J.H., 2001, The Complete Gravity Gradient Tensor Derived From The Vertical Component of Gravity : A Fourier Transform Technique, *Journal of Applied Geophysics*, **46**, 156-176.
8. Pedersen, L.B., Rasmussen, T.M., 1990, The Gradient Tensor of Potential Field Anomalies: Some Implications on Data Collection and Data Processing of Maps, *Geophysics*, **55**, 1558-1566.
9. Vasco, D.W., Taylor, C., 1991, Inversion of Airborne Gravity Gradient data, South-western Oklahoma, *Geophysics*, **56**, 90-101.
10. Zhang, C., Mushayandebvu, M.F., Reid, A.B., Fairhead, J.D., Odegard, M.E., 2000, Euler Deconvolution of Gravity Tensor Gradient Data, *Geophysics*, **65**, 512-520.



Gambar 3.

Komponen tensor gradien gravitasi ( $\Gamma_{ij}$ ) hasil perhitungan menggunakan FFT dari data sintetik ( $g_z$ ) untuk model yang lebih kompleks. Kontur pada setiap panel secara kualitatif menyatakan harga minimum (putih) dan maksimum (hitam) gradien gravitasi.